AL EEUWEN WOEDT DE DISCUSSIE ONDER WISKUNDIGEN, FILOSOFEN EN NATUURKUNDIGEN OF WE IN EEN DISCRETE DAN WEL IN EEN CONTINUE WERELD LEVEN. DE OUDE GRIEKEN WILDEN DE WERELD IN GEHELE GETALLEN VATTEN. MAAR OM EEN CONTINUE WERELD TE BESCHRIJVEN MOESTEN DE GEHELE GETALLEN WORDEN UITGEBREID MET DE RATIONALE EN IRRATIONALE GETALLEN. PAS IN DE NEGENTIENDE EEUW KONDEN DE IRRATIONALE GETALLEN PRECIEZER WORDEN GEDEFINIEERD. TOT OP VANDAAG GAAT DE ZOEKTOCHT NAAR IRRATIONALE GETALLEN VOORT.

Irrationale getallen: niet realiseerbaar, wel reëel

Adhemar Bultheel

Al eeuwen is er een discussie aan de gang tussen filosofen, wiskundigen en natuurkundigen of we in een discrete dan wel in een continue wereld leven. ‘God schiep de gehele getallen en al de rest is des mensen’, verklaarde de wiskundige Leopold Kronecker in de negentiende eeuw. Maar dit idee leefde ook al bij Pythagoras en de oude Grieken. Voor hen was het zowat een geloofspunt dat men alles kon uitdrukken in natuurlijke getallen (zoals 1, 4, 25 of 1423). Er was altijd wel een kleinste eenheid te vinden zodat je een lengte met een geheel getal kon aanduiden. Een geheel getal is een natuurlijk getal, eventueel voorzien van een minteken (zoals –1 of –4), wat handig is om aan te geven of je boven of onder een bepaald punt zit. Dat punt duiden we aan met 0, en ook dit is na vele eeuwen discussie aanvaard als een geheel getal. Heb je maar driekwart van de lengte nodig, dan kun je dat aangeven met een breuk 3/4. Dat is een rationaal getal, namelijk de verhouding (of ratio) van twee gehele getallen. Als je een kwart als eenheid neemt, kun je de twee lijnstukken als 3 en 4 keer die eenheid aangeven, dus als gehele getallen. We kunnen onze wereld met rationale getallen beschrijven als er een kleinste eenheid is waarmee we dingen kunnen meten. De kwantumfysica werkt met bouwstenen ter grootte van de constante van Panck, zo klein dus dat ze maar kunnen worden waargenomen met astronomische hoeveelheden energie. Ook al ligt dit ver buiten ons meetvermogen, we kunnen die eenheden theoretisch nog oneindig verder opdelen, want alles wat niet 0 is kun je nog halveren tot iets kleiner. In deze logica belanden we in een continuüm. Zo ervaren we intuïtief tijd als een vloeiende, continu veranderende hoeveelheid. Als onze wereld continu is, hebben we echter meer nodig dan de rationale getallen om die te beschrijven. Als we de rationale getallen uitbreiden met de irrationale getallen, dan krijgen we de reële getallen: hiermee kunnen we een continue wereld beschrijven, die al dan niet met de realiteit overeenstemt, want die wereld zullen we toch nooit kunnen meten. Maar wat zijn reële getallen dan?

Laten we beginnen met de stelling van Pythagoras. De formule $a^2 + b^2 = c^2$ zit in het collectieve geheugen, en de meeste mensen zullen weten dat a en b de loodrechte zijden van een driehoek zijn en c de schuine zijde. Nu is het precies die stelling die als een tikkende tijdbom het pythagorische geloofspunt over natuurlijke getallen onderuithaalt. Als a en b allebei 1 zijn, dan is $c = \sqrt{2}$. Als je nog papier gebruikt, dan ervaar je dit getal dagelijks als de verhouding van de lengte op de breedte van het A4-formaat. (Of ongeveer die verhouding, want als je tot op het niveau van de atomen van het papier zou gaan worden lengte en breedte wazige begrippen.) Dat is niet zo met $\sqrt{2}$. Als je dit getal met decimalen schrijft, dan blijf je cijfers na de komma genereren. Dat gebeurt toch wel meer, zal je zeggen. Denk maar aan de breuk 1/3. Die geeft ook een oneindige rij drietjes. Ook bij 1/7 = 0,142857142857142857... zie je een patroon van cijfers dat zich oneindig dikwijls herhaalt. Geen probleem, want je kunt dan 1/3 of 1/7 als eenheid nemen en de vorige 1 is dan 3 of 7 keer de nieuwe eenheid. Dus door de eenheid maar klein genoeg te kiezen kun je rationale getallen uitdrukken als gehele veelvouden van die eenheid. De Grieken vonden dat zo fundamenteel dat het woord ratio via het Latijn tot bij ons is gekomen, ook in de betekenis van rede of gezond verstand. Maar met $\sqrt{2}$ is toch iets anders aan de hand want in $\sqrt{2}$ kun je zo een herhaald patroon niet vinden, hoe ver je ook doorrekent.

Ook de Grieken zagen de ‘onmeetbaarheid’ van $\sqrt{2}$ en andere wortels al gauw in. De legende gaat dat Hippasus, een lid van de sekte van Pythagoras, het leven liet omwille van die ontdekking. Zijn bewijs dat $\sqrt{2}$ ‘onmeetbaar’ of ‘irrationaal’ is kennen we via Plato, en het is meteen ook een van de elegantste bewijzen van de wiskunde. Euclides beschreef die irrationale getallen in zijn *Elementen*, die tot de vorige eeuw nog de basis vormden van het meetkundeonderwijs in de humaniora. Door getallen als $\sqrt{2}$ naar de meetkunde te verbannen werd het probleem gedeeltelijk omzeild. Ze waren dan wel irrationaal, maar je kon ze ‘construeren’. Met een passer kun je inderdaad een lijn loodrecht op een andere construeren, en een aantal keer een eenheid uitzetten. Theodorus construeerde al in de tijd van Pythagoras een spiraal waarin alle wortels van $\sqrt{2}$ tot $\sqrt{17}$ voorkwamen, door 16 driehoeken aan elkaar te plakken. Maar andere constructies waren dan weer onmogelijk. Zo heeft men eeuwen gezocht naar de kwadratuur van de cirkel – dit wil zeggen alleen met passer en liniaal een vierkant construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van een cirkel – wat niet lukte omdat π niet construeerbaar is. De gulden snede $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ is een ander voorbeeld van een wortelgetal waarvan de Grieken wisten dat het construeerbaar was. Het werd in de renaissance door Luca Pacioli tot ‘Goddelijke Ratio’ uitgeroepen omdat het in de klassieke architectuur en beeldhouwkunst als een ideale maat van schoonheid zou gebruikt zijn.

Tot nu toe hebben we rationale en irrationale getallen met decimalen voorgesteld, maar die argumenten zijn eigenlijk historisch gezien onjuist. De Indo-Arabische cijfers werden in Europa pas in de dertiende eeuw geïntroduceerd door Fibonacci, en de decimale getallen werden populair gemaakt door Simon Stevin met zijn boek *De Thiende* (1585). Ondertussen was via de Arabieren ook de algebra ontdekt, en kwamen zo de wortelgetallen weer op de proppen bij het oplossen van vergelijkingen. De meetkundige wiskunde van de Grieken had plaatsgemaakt voor de algebra van de Arabieren. Het onderscheid tussen construeerbaar en niet construeerbaar maakte plaats voor een algebraïsch onderscheid. Neem de gulden snede φ. Die is algebraïsch omdat $x = \varphi$ de uitdrukking $x^2 - x - 1$ nul maakt. Die uitdrukking is een veelterm van graad 2 met coëfficiënten 1, –1,–1 en men zegt dat φ er een nulpunt van is. Zo voldoet ook $x = \sqrt[3]{2}$, de derdemachtswortel van 2, aan $x^3 - 2 = 0$. Het is een nulpunt van een veelterm van de derde graad. Een getal dat een nulpunt is van een veelterm met gehele coëfficiënten noemt men algebraïsch. Zoniet overstijgt het de algebra en noemt men het transcendent. Transcendente getallen zijn automatisch irrationaal. Het getal $\sqrt[3]{2}$ is dus wel algebraïsch maar niet construeerbaar, want de Grieken konden met de constructie van $\sqrt{2}$ wel de oppervlakte van een vierkant maar niet het volume van een kubus verdubbelen.

De algebristen probeerden – dikwijls tevergeefs – het omgekeerde probleem op te lossen, namelijk een formule vinden voor de nulpunten van gegeven veeltermen. Die koortsachtige zoektocht viel stil toen de briljante Noorse wiskundige Niels Abel 250 jaar later aantoonde dat, als de graad van de veelterm 5 of hoger is, in het algemeen zo een formule niet bestaat. (Naar hem is overigens de Abelprijs genoemd, die sinds 2001 fungeert als een soort Nobelprijs voor de wiskunde.) Wat Abel ontdekt had, was eigenlijk ook al door de Franse revolutionair Evariste Galois gevonden, maar zijn werk was niet helder en raakte niet meteen gepubliceerd. Hun resultaat betekent dat er dus transcendente getallen bestaan. Het getal π werd alvast bij de verdachten gerekend.

Tijd om de meest populaire irrationale getallen te bekijken: e en π. Het getal π kent iedereen wel als de omtrek van een cirkel met diameter 1. Vandaar de Griekse letter π van 'periphereia'. Het getal e verwijst naar Leonard Euler, een Zwitsers wiskundig genie (die trouwens ook het gebruik van de letter π populariseerde). Daarmee zijn we meteen in de achttiende eeuw beland. Maar e was al honderd jaar voor hem ontdekt door Jacob Bernoulli, als het resultaat van een berekening van samengestelde interest. Stel dat je 1 euro aan 100 procent per jaar belegt, dan krijg je na 1 jaar 2 euro. Als je de rente na 6 maand krijgt uitbetaald en herbelegt, dan heb je na 1 jaar $(1 + 1/n)^2 = 2{,}25$ euro. Als je elke dag de rente kan herbeleggen krijg je $(1+1/365)^{365} = 2{,}714567482$ euro, en als je elk moment ogenblikkelijk zou kunnen herbeleggen krijg je $(1 + 1/n)^n$ voor n oneindig groot, en dat is het getal e, wat iets groter dan 2,7 is. Euler op zijn beurt wou aantonen dat e en π irrationaal waren. Een belangrijk wiskundig speeltje daarbij waren de kettingbreuken, dit zijn breuken waarvan de noemer onder de breukstreep weer een breuk is, waarvan de noemer onder de breukstreep … enzovoort. (Je zou die kunnen omschrijven als breuken met het 'Droste-effect': op de verpakking van cacaopoeder van Droste stond vroeger een verpleegster met een doos cacaopoeder van Droste waarop een verpleegster stond met een doos cacaopoeder …) Euler merkte op dat als je e als een kettingbreuk schrijft – dus met oneindig veel delingen in plaats van oneindig veel vermenigvuldigingen – er in de noemers met een zekere regelmaat alle even getallen 2, 4, 6, … verschijnen. Omdat dit tot in het oneindige doorloopt, kon hij met enige moeite bewijzen dat e irrationaal is.

Ook π werd ervan verdacht irrationaal te zijn, maar de kettingbreuk van π bezat niet dezelfde regelmaat als die van e. Johann Heinrich Lambert, een tijdgenoot van Euler, kon echter bewijzen dat de kettingbreuk van de tangens van een rationaal getal irrationaal was, en vermits de tangens van $\pi/4$ gelijk is aan 1, kan π dus niet rationaal zijn. Hierdoor waren twee glamoureuze getallen bijgezet in het pantheon der irrationale getallen, ver verheven boven de laag-bij-de-grondse wortelgetallen. Later werden nog andere bewijzen gevonden voor dit feit, en ook voor de irrationaliteit van machten en wortels ervan.

De zoektocht van wiskundigen naar irrationale en transcendente getallen, en vooral het bewijs van hun irrationaliteit, gaat tot vandaag door. Een mogelijke bron van inspiratie is daarbij de zetafunctie, genoteerd als ζ. Als n en s natuurlijke getallen zijn, dan zal n^s steeds groter worden naarmate n stijgt, en dus zal $1/n^s$ een steeds kleiner wordend getal zijn.

Als je m van die rationale getallen $1/n^s$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots, m$ optelt, dan krijg je nog steeds een rationaal

getal, en door m steeds maar groter te nemen, komt de som steeds dichter en dichter bij een limietwaarde en die limiet is $\zeta(s)$. We kunnen $\zeta(1)$ meteen wegwerpen, want die is oneindig en dus niet interessant. Euler bewees dat $\zeta(2)$ gelijk was aan $\pi/6$, en zelfs dat $\zeta(2k)$ gegeven wordt door een rationaal getal maal $\pi 2k$. Dus alle $\zeta(s)$ met even s zijn irrationaal; het gaat om limieten van rijen van rationale getallen, maar ze zijn zelf irrationaal. De uitdaging is om aan te tonen dat $\zeta(s)$ voor oneven s ook irrationaal is. Het was pas in 1978 dat de Franse wiskundige Roger Apéry kon aantonen dat $\zeta(3)$ irrationaal is. Hoewel men weet dat er oneindig veel irrationalen zitten tussen $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, … blijft het voorlopig nog zoeken naar een bewijs voor de volgende irrationale zeta.

Zijn de irrationale $\zeta(s)$ ook transcendent? Het antwoord kennen we alleen voor even s. Dat hangt samen met de transcendentie van e en π, iets wat we weten sinds Ferdinand von Lindemann dit in 1882 kon bevestigen, gebaseerd op eerder werk van Charles Hermite. Hij toonde eerst aan dat e transcendent was. Daarna kon hij bewijzen dat ook π transcendent was, door gebruik te maken van wat wel eens de mooiste formule uit de wiskunde wordt genoemd: $e^{i\pi} = -1$. Vermits $\zeta(2k) = c\,\pi^{2k}$ zijn ook deze allemaal transcendent. Karl Weierstrass voegde daar dan aan toe dat ook e^{π} transcendent is. Maar nog steeds is weinig geweten over andere combinaties, zoals $e\pi$ of $e + \pi$. Het is zelfs niet bewezen dat ze irrationaal zijn.

De oneindigheid van de irrationale getallen is oneindig veel oneindiger dan die van de rationale getallen

Misschien wekt het verhaal tot nu toe de indruk dat er slechts een paar irrationale getallen bestaan. Niets is echter minder waar. Er zijn er oneindig veel, en wel zoveel dat we ze in tegenstelling tot de rationale getallen niet eens kunnen nummeren. Als je de rationale getallen volgens grootte rangschikt is het moeilijk om ze te tellen, want tussen twee verschillende rationale getallen zitten altijd oneindig veel andere rationale getallen. Je kunt ze wel in het gelid zetten door ze als volgt op te sommen: 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, … Het patroon is dat je alle breuken p/q opnoemt waarvoor $p + q$ opeenvolgend gelijk is aan 2, 3, 4, 5, … Je laat alle dubbels weg, zoals 2/2 en 3/3, of 2/4 en 3/6. Voeg de 0 vooraan toe en laat elk getal voorafgaan door min zichzelf. Zo krijg je alle rationale getallen, de positieve en de negatieve, en omdat je zo elk getal een uniek nummer 1, 2, 3, … kunt geven zijn er precies evenveel natuurlijke getallen als er rationale getallen zijn. Men zegt ook wel eens dat ze aftelbaar zijn. Concreet betekent dit dat je een lengte dus steeds nauwkeuriger kunt opmeten door de eenheden op de meetlat te blijven opdelen. Zolang we niet tot in het oneindige zijn doorgegaan, kunnen we het resultaat benoemen met een geheel getal. Maar net zoals de som in de zetafunctie rationaal is zolang er eindig veel termen zijn, maar de waarde irrationaal wordt als er oneindig veel genomen worden, zo kan het ook zijn dat we bij een irrationale waarde uitkomen als we de meetlat tot in het oneindige blijven verfijnen. Tussen twee verschillende rationale getallen zitten ook oneindig veel irrationale getallen. Alleen zijn het er oneindig veel meer, want stel dat je die ook zou kunnen nummeren zoals de rationale getallen, dan kun je er altijd eentje produceren dat niet in de rij staat, aldus stelde Georg Cantor op het einde van de negentiende eeuw. Irrationale getallen laten zich niet nummeren. Ze zijn met andere woorden niet aftelbaar en daarom zijn er meer irrationale getallen dan rationale. Van beide types zijn er oneindig veel, maar de oneindigheid van de irrationale getallen is oneindig veel oneindiger dan die van de rationale getallen. Toen dit duidelijk werd, was het voor de wiskundigen een schok, vergelijkbaar met de schok die het bestaan van irrationale getallen bij de Grieken teweegbracht. Ze sloegen elkaar met paradoxen om de oren. De hele verzamelingenleer stond meteen op losse schroeven en de fundamenten van de wiskunde moesten worden herschreven.

Pas nadat we de gehele getallen uitbreiden met de rationale en de irrationale getallen en ze allemaal volgens grootte op een lijn zetten krijgen we de reële rechte, een continuüm waarop elk punt een reëel getal voorstelt. Dit is geen antwoord op de vraag of onze wereld continu dan wel discreet is, maar het verklaart wel hoe de wiskunde zich een continue wereld schept. Of die wereld nu echt bestaat of niet, voor de wiskundige is hij alvast reëel. ●

Julian Havil, *The Irrationals. A Story of Numbers You Can't Count on.* (Princeton University Press, 2012).
Amit Hagar, *Discrete or Continuous? The Quest for Fundamental Length in Modern Physics.* (Cambridge: Cambridge University